

銘傳大學九十學年度資訊管理研究所碩士班招生考試

第二節

微積分 試題

1. 求下列極限值 15%

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^2}$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin[x]$, 其中 $[\cdot]$ 表高斯符號。

(v) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) f(x)$, 其中 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x & , \text{ 當 } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ 當 } x = 0 \end{cases}$

2. 求下列函數 f 的倒函數 $f'(x)$ 12%

(i) $f(x) = 10^{x^2}$ (ii) $f(x) = \int_{x^2}^2 (1 + e^{t^2}) dt$

(iii) $f(x) = \cos|3x+1|$ (iv) $f(x) = \begin{cases} e^{4x} & , \text{ 當 } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & , \text{ 當 } x > 0 \end{cases}$

3. 已知 $f(x) = 2x^4 - 8x^3$ 12%

- (i) 試問 f 在何處遞增，何處遞減？
- (ii) 試求 f 的相對極大值與相對極小值？
- (iii) 試描繪出 $y=f(x)$ 的圖形。

4. 求下列積分 15%

(i) $\int_0^2 \sqrt{8-2x^2} dx$ (ii) $\int_0^1 x^3 \sqrt{2+x^4} dx$ (iii) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$

(iv) $\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$ (v) $\int_0^1 \tan^{-1} x dx$

5. 令 D 表由 $x = y + 1$ 與 $x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{13}{2}$ 曲線所圍出封閉區域，求 D 的面積。

7%

6. 某甲由點(1,-1)開始沿著曲線 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 行走至點(4,8)試問某甲共行走多少

距離。 7%

7. 判斷下列級數何者收斂，何者發散？ 12%

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{2}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n) \cdot (2n+1)}$

(iii) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 其中 $A_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & \text{當 } n \text{ 是奇數} \\ \frac{1}{4^n} & \text{當 } n \text{ 是偶數} \end{cases}$

8. 求 $f(x) = \cos(\pi + x)$ 在 $x=0$ 的泰勒展開級數。 8%

9. 已知冪級數 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n$ 。 12%

(i) 求此級數的收斂半徑(The radius of convergence) r 。

(ii) 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n, |x| < r$, 其中 r 為(i)之值，試求 $f(x)$ 。

(iii) 試計算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ 之值。

試題完