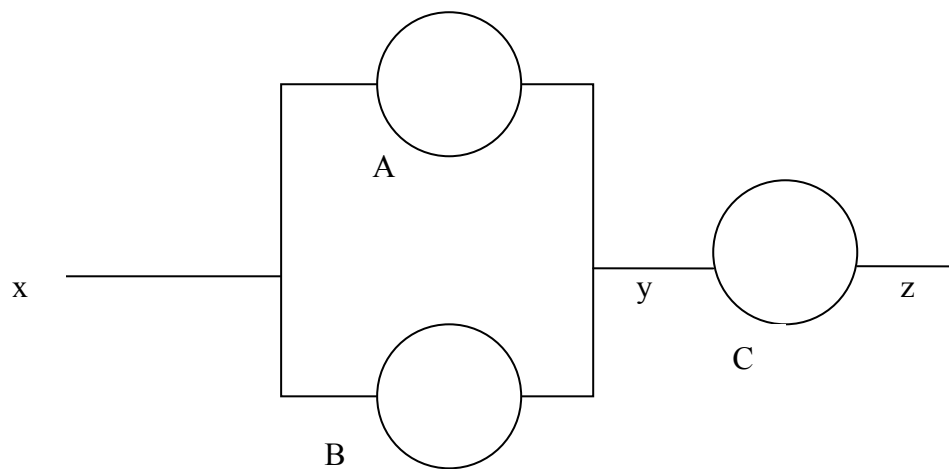


第一節

機率論 試題

1. 以下為一串並聯電路，A 或 B 元件任一個有作用，則 x 點到 y 點有作用；x 點到 z 點，C 元件必須要有作用方可作用。請回答以下問題。



- a. A、B、C 是三個獨立作用的電子元件，其可作用的機率分別為 $p_1=0.9$ 、 $p_2=p_3=0.95$ ，請問 x 點到 y 點有作用的機率為何？x 點到 z 點有作用的機率為何？(15%)
- b. 假設 A、B、C 三個獨立作用的電子元件之壽命均為指數分配，其平均壽命分別為 $\theta_1=2$ 年， θ_2 未知及 $\theta_3=2$ 年，請問 B 元件的平均壽命 θ_2 至少為多少年時，一年後 x 點到 z 點仍有作用的機率大於 0.5。(10%)
(指數分配： $X \sim \text{Exp}(\theta)$ ，其 p. d. f. 為 $f(x) = 1/\theta \exp(-x/\theta)$ ， $x>0$ ， $\theta >0$.)
2. 兩獨立的隨機變數 $Y_1 \sim N(0, \sigma^2)$ ， $Y_2 \sim N(0, \sigma^2)$ 為常態分配，請回答下列問題。
- a. 求 $W = (Y_1/\sigma)^2 + (Y_2/\sigma)^2$ 之分配及其期望值 $E(W)$ ？(10%)
- b. c 為一常數，求 $V = c + Y_1 + Y_2$ 之分配？(5%)
- c. 求 $U = e^V$ 之分配及其期望值 $E(U) = ?$ (10%)
(常態分配： $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，其動差母函數 $M_X(t) = \exp[\mu t + \sigma^2 t^2 / 2]$)

3. 兩獨立的隨機變數 $U \sim P(\lambda_1)$, $V \sim P(\lambda_2)$ Poisson 分配，令 $T=U+V$ 。
- $c \neq 1$ 為一固定常數， cU 的分配是否仍為 Poisson 分配？(5%)
 - 求期望值 $E(T)$ 及 $E(T^2) = ?$ (10%)
 - t 是不為零的常數，求給定 $T = t$ 時， U 的機率分配，即 $U | T=t$ 的條件機率分配。(10%)
- (Poisson 分配： $X \sim P(\lambda)$ ，其機率函數 $P(X=x) = \lambda^x e^{-\lambda} / x!$, $x=0,1,2,\dots$, $\lambda > 0$,
動差母函數 $M_X(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)]$)
4. 隨機樣本 U_1, U_2, \dots, U_{30} 獨立且服從均勻分配 $U(0, \theta)$ ，令 $U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(30)}$ 為由小到大的順序統計量 (order statistics)。
- 利用中央極限定理(Central Limit Theorem)求 $\bar{U} = (U_1 + U_2 + \dots + U_{30}) / 30$ 的近似機率分配為何？(15%)
 - 假如 $E(U_{(30)}) = 5$ ，求 $\theta = ?$ (5%)
 - 求 $P(U_{(1)} < \theta/3 < U_{(3)}) = ?$ (5%)
- (均勻分配： $X \sim U(0, \theta)$ ，其 p.d.f 為 $f(x) = 1/\theta, 0 < x < \theta, \theta > 0$)

試題完