

是非題, 下列敘述, 對的打0, 錯的打X.

- (i) 若 $y = (x^8 + 4x)^3$, 則 $D_x^8 y = 0$.
- (ii) 若 $f'(x) = g'(x), \forall x$, 則 $f(x) = g(x), \forall x$.
- (iii) 若 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, 則 $f(c) = L$.
- (iv) 若 $f(x) \neq g(x), \forall x$, 則 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 與 $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ 一定不相等。
- (v) 若 $\int_a^b (f(x))^2 dx = 0$, 則 $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.
- (vi) 若 f 是可微分函數, 則 $\int f'(x) dx = f(x)$.
- (vii) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂且 $a_n > 0, n=1, 2, \dots$ 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) < 1$.

求下列極限值.

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \ln \sin x)$ (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{2n}$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 4x}$ (iv) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$
- (v) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+x} \sin^4 t dt \right)$

求下列函數 f 的導函數 (即求 f').

- (i) $f(x) = x^{2x+1}$ (ii) $f(x) = [2x^2+1]$, 其中 $[]$ 表高斯符號.
- (iii) $f(x) = \sin^{-1}(4x^2+1)$ (iv) $f(x) = \int_{3x}^0 t^3 \cos t dt$.
- (v) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{當 } x \text{ 是有理數.} \\ -x^2, & \text{當 } x \text{ 是無理數.} \end{cases}$

4. 求下列積分.

20% (i) $\int_0^1 (4x+1)^3 dx$

(ii) $\int_0^1 x^2 e^x dx$

(iii) $\int_0^{4\pi} |\cos 2x| dx$

(iv) $\int_1^2 \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} dx$

(v) $\int_0^{1/3} \sqrt{4-9x^2} dx$

5. 已知 $f(x) = x + \frac{4}{x-2}$.

20% (i) 試問 f 在何處遞增, 何處遞減?

(ii) 試求 f 的相對極大值與相對極小值?

(iii) 試問 $y=f(x)$ 圖形在何處上凹 (Concave up), 何處下凹 (Concave down)?

(iv) 試描繪出 $y=f(x)$ 圖形.

6. (i) 求 $f(x) = \ln 2x$ 在 $x_0 = \frac{1}{2}$ 處的泰勒級數 (Taylor series)

(ii) 計算 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^4 \cdot 4} + \frac{1}{2^5 \cdot 5} + \dots$ 之值.

試題結束

本試題係兩面印刷

試題完