

線性代數 試題

(限用答案本作答)

應用統計資訊碩士班線性代數測驗卷

※除了第壹題外，其他題必須寫下必要的過程，否則不給分，請按照題號順序作答，每題10分共計100分。

壹、已知 A 為一個 4×4 之實數對稱矩陣，其 4 個特徵值為 1、2、2、2 則 (填充題；參考答案在括號內)

- (a) $\det(A) = ?$ 。 參考：(填入某一數值、無法確定)
 (b) A $? 可逆矩陣$ 。 參考：(必為、不為、無法確定是否為)
 (c) 對任何 \mathbb{R}^4 向量 b ，方程組 $Ax = b$ $? 。$ 參考：(有解、無解、不確知有無解)
 (d) A $? 對角化$ 。 參考：(可正交、不可、可以)
 (e) A 經基本列運算 $? I_4$ 。 參考：(可能可得、無法得、必可得)
 (f) A 的四個行向量 $? \mathbb{R}^4$ 。 參考：(\subseteq 、生成、 \supseteq 、關係無法確定)
 (g) A 的四個列向量為線性 $? 。$ 參考：(相依、獨立、關係無法確定)
 (h) $\text{rank}(A) = ?$ 。 參考：(0、1、2、3、4)
 (i) 對應特徵值 2 所得的特徵空間維度是 $? 。$ 參考：(0、1、2、3、4)
 (j) Nullity of A = $? 。$ 參考：(0、1、2、3、4)

貳、Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Find the trace of $(A^T * A) = ? 。$

參、Let B be a 3×3 square matrix and $\det(B) = |B| = 2$. Find the following:

- (a) $|4(B)^{-1}| = ?$ (b) $|B(\text{adj } B)| = ?$

肆、Find the steady-state vector of the following regular transition matrix $M =$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \text{ of Markov process.}$$

伍、求解下列非齊次線性方程組。

$$\begin{cases} 1x + 2y + 3z + t = 0 \\ 1x + 1y + 2z + t = 1 \\ 0x + 1y + 2z + t = 1 \end{cases}, \text{ 已知 } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{基本列運算}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

陸、令 $S = \{(1, 0), (2, 1)\}$; $T = \{(0, 1), (1, 0)\}$ 分別為 $V = \mathbb{R}^2$ 之基底, $u = (8, 6)$, 試問:

- (a) 求 $[u]_S = ?$
 (b) 求轉換矩陣 $P_{T \leftarrow S}$ 從 S 基底轉換至 T 基底?
 (c) 求 $[u]_T$, 必須使用(a)及(b), 否則不給分?

柒、給定平面上的三點: $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 5)$, 試求:

- (A) 恰通過此三點的二次方程式: $y = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}x + \underline{\hspace{1cm}}x^2$
 (B) 此三點所決定的最小平方方法直線方程式: $y = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}x$

線性代數 試題

(限用答案本作答)

捌、 Let $W = \{ \text{The set of all vectors of the form } (a, b, c, d), \text{ where } a - b - 2c - 6d = 0 \}$ be a subsets of \mathbb{R}^4 .

- (a) Verify W is a subspace of \mathbb{R}^4
- (b) Find an orthogonal basis of W .
- (c) Find a basis for W^\perp .

玖、 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 經列運算後得到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 試問:

- (a) rank(A).
- (b) 將A之第五行表達為前四行間的線性組合.
- (c) null space of A (寫出 null space 子空間之一組基底).
- (d) 以此例子說明矩陣行數與 nullity 及 rank 間的關係式.

壹拾、 Let $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

- (a) Find the eigenvalues and associated eigenvectors of A .
- (b) Find an orthogonal matrix P such that $P^{-1}AP = D$, a diagonal matrix.
- (c) Find the eigenvalues of A^4 .
- (d) Find $A^{10} - A^9 - 2A^8 + A$

本試題兩面印刷

試題完