

機率論 試題

(限用答案本作答)

1. 假設兩獨立隨機變數 X 與 Y 服從幾何分配 (geometrically distributed), 參數 p , 其機率分配函數 $f(x) = p(1-p)^x$, $x = 0, 1, 2, \dots$, $0 < p < 1$, 試求
- a. $Z = X + Y$ 的機率分配為何? (10%)
- b. 求條件機率 $P(Y = y | X + Y = z)$, $y = 0, 1, \dots, z$, $\forall z \geq 1$. (10%)

2. 令隨機變數 X 的機率分配 $f(x) = \frac{c}{x(x+1)}$, $x = 2, 3, \dots$, c 為大於零的常數。
- a. 求 $c = ?$ (10%)
- b. 求期望值 $E(X)$. (10%)

3. 令 X 與 Y 是兩獨立隨機變數, 均服從標準常態分配 $N(0, 1)$, 求 $U = 2X + Y$ 與 $V = 2X - 4Y$ 的聯合機率函數? (10%)

4. 假設 $\Theta = \theta$ 下 X 的條件 $p.d.f$ 為 $f(x|\theta) = 0.4\theta I_{(-\frac{1}{\theta} < x < 0)} + 0.6\theta I_{(0 \leq x < \frac{1}{\theta})}$, 且

Θ 服從均勻分配 $U(1, 2)$, 其 $p.d.f$ $f(\theta) = 1 I_{(1 < \theta < 2)}$, 其中指示函數

$$I_{(x \in S)} = \begin{cases} 1, & x \in S, \\ 0, & x \notin S. \end{cases}, \text{ 試求}$$

- a. 條件期望值 $E(X|\theta) = ?$ (10%)
- b. 求 X 的邊際機率分配 $f(x) = ?$ (10%)

5. 隨機樣本 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 服從機率分配 $f(y) = \frac{ay^{a-1}}{\theta^a}$, $0 < y < \theta$, $a, \theta > 0$. 令

$Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(k)}, \dots, Y_{(n)}$ 是由小排到大的順序統計量 (order statistics), 試求

第 k 階順序統計量 $Y_{(k)}$ 的第 γ 階動差 $E(Y_{(k)}^\gamma)$, $\forall \gamma > -ka$. (10%)

6. 試回答下列的統計量的分配為何?

- a. 假設隨機樣本 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 獨立服從標準常態分配 $N(0, 1)$, 試說明

$$X = \frac{(n-1)Y_1^2}{Y_2^2 + Y_3^2 + \dots + Y_n^2} \text{ 的分配為何? (10%)}$$

- b. 假設兩隨機樣本 X_1, X_2, \dots, X_m 與 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 獨立且皆服從指數分

配, 其 $p.d.f$ $f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$, $x > 0, \theta > 0$, 則 $S = \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{\sum_{j=1}^n Y_j}$ 的分配為

何? (10%)

試題完