

銘傳大學九十二學年度重點運動項目績優學生獨立招生考試

第三節

數學 試題

1. 若 $a, b \in \mathbb{R}$ ，則 $a + b = 0$ 為 $a = b = 0$ 的什麼條件？(8%)
2. 已知 $f(x) = \sqrt{2x - 3}$ 有反函數。(12%)
 - (1) 求 $f^{-1}(1) = ?$
 - (2) 求 $f^{-1}(x) = ?$
 - (3) 求出 f^{-1} 的定義域及值域
 - (4) 將 $f(x)$ 與 $f^{-1}(x)$ 之圖形繪在同一坐標平面上
3. 試將 $\cos(2 \tan^{-1} x)$ 以 x 的代數式表示式。(8%)
4. 試求不等式
$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0 \\ 2x^2 - 3x \geq 0 \end{cases}$$
 的解，並以數線表示式
5. 試求三角方程式 $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$ 在 $(0, 2\pi)$ 的解。
6. 設 $0 < a < 1$ ，試問下列哪些性質是指數函數 $f(x) = a^x$ 的特性（全部對才予以計分）(12%)
 - (1) 函數圖形通過點 $(1, 0)$
 - (2) 是一嚴格增函數
 - (3) x 軸為函數圖形的漸近線(水平漸近線)
 - (4) 對任一 $k > 0$ ，函數圖形與水平線 $y = k$ 卻有一交點
 - (5) 函數圖形與任一鉛直線 $x = h$ 卻有一交點
 - (6) $f(x) = a^x$ 為一對一函數
7. 設 $x = \log_a \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ (但 $a > 0, a \neq 1$)，求 $a^x + a^{-x}$ 之值(8%)
8. (1) 設 $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ ，證明： $M^{\log_a N} = N^{\log_a M}$
 - (2) 試利用(1)的結果求 $3^{\log_2 7} - 7^{\log_2 3} + 3^{\log_3 5} - 7^{\log_7 5}$

9. 設 $\vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, 已知 $\vec{u} \perp \vec{v}$, 且 $|\vec{u}| = 1$, 求 \vec{u} . (10%)

10. 設球 $S = x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 8z - 15 = 0$, 平面 $E : 2x - y - 2z + k = 0$

(1) 試求球 S 之球心坐標 (x_0, y_0, z_0) 及半徑之值

(2) 試問 k 爲何值時，球與平面交於一圓 (10%)