

微積分 試題 (限用答案本作答)

注意：每題十分

1. 試問函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1}, & \text{若 } x \neq \pm 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{若 } x = 1 \\ 0, & \text{若 } x = -1 \end{cases}$ 在那裡連續，在那裡不連續，

請說明理由。

2. 求下列極限值。

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x^x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

3. 試問函數 $f(x) = x^3 + x + 1$ 是否有反函數，請說明理由。若 $f(x)$

有反函數，求 $(f^{-1})'(3)$ 。

4. 若 $|x| < 1$ ，求 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 。

5. 已知 $\int_0^{\infty} x^{-0.5} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$ ，求 $\int_0^{\infty} x^{0.5} e^{-x} dx$ 。

6. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$ 。

7. 求曲線 $xy = 3$ 至原點 $(0,0)$ 最近的點座標。

8. 求 $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2} dx dy$ 。

9. 求 $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx$ 。

10. 若 $\int_0^x f(t) dt = x^3 + x^2 + x$ ，求 $f(1)$ 。

試題完