

1. 求下列極限值。

15% (i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x)$

(iv)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$

(v)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  其中  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{當 } x > 0 \\ 0 & \text{當 } x = 0 \\ \cos x & \text{當 } x < 0. \end{cases}$

2. 已知  $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$

15% (i) 試問  $f$  在何處遞增, 何處遞減?

(ii) 求  $f$  的相對極大值與相對極小值。

(iii) 試問  $f$  在何處上凹 (Concave Upward), 何處下凹? (Concave Downward)

3. 求下列積分。

18% (i)  $\int_0^1 (1-x)^9 dx$

(ii)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} d\theta$

(iii)  $\int_0^{\infty} e^{-(x-2)^2} dx$

(iv)  $\int_0^{1/4} \frac{4-5x}{2x^2+x-1} dx$

(v)  $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2) dx dy$

(vi)  $\int_0^2 [x] dx$ , 其中  $[ \ ]$  表高斯符號

4. 求  $\frac{dy}{dx}$

15% (i)  $y = (x^4 - 3x^2)^3$

(ii)  $y = \log_5(1+2x)$

(iii)  $y = 3^{x \ln x}$

(iv)  $y = \int_0^{2x} t e^t dt$

(v)  $y = x \tan^{-1}(3x)$

本試題兩面印刷

5. 求  $\cos \frac{x}{2}$  在  $\pi$  處的泰勒級數? 試問此泰勒級數是否與  $\cos \frac{x}{2}$  相等? 為什麼?

接 下 頁

6. 判斷下列級數收斂或發散。

12% (i)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+3\sqrt{n}}$

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  其中  $a_n = \begin{cases} 4^n & \text{當 } n \text{ 為偶數} \\ 3^{-n} & \text{當 } n \text{ 為奇數} \end{cases}$

(iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!}$

(iv)  $\frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} + \dots$

(v)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

(vi)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\beta n)}{n^2}$

7. 求下列冪級數的收斂半徑與收斂區間?

16% (i)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n X^n}{n+1}$

(ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(X-4)^n}{n^3+2}$

(iii)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$

(iv)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$  其中  $a_n = \begin{cases} 3^n & \text{當 } n \text{ 為奇數} \\ 4^n & \text{當 } n \text{ 為偶數} \end{cases}$

試題結束